

# ESTUDO CIENTÍFICO DE ESCALAS E TEMPERAMENTOS COM CENTO E COMAS

**Hidetoshi Arakawa**

Unicamp

e-mail: arakawah@correionet.com.br

Resumo: Criado por Ellis em 1864, a notação do cento foi adotada no estudo de escala e temperamento, ao lado da tradicional razão de freqüências. A vantagem do cento é a visualização da posição da nota na escala e da distância entre notas. Como cento é expoente, a distância entre notas é calculada com simples adição ou subtração. Uma das desvantagens do cento é que os valores expressados são aproximados e não exatos, exceto no igual temperamento. Por causa disto, o cento não é reversível à razão de freqüências, valor exato. Outra desvantagem é a necessidade de cálculo logarítmico com calculadora científica ou computador para transformar a razão de freqüências em cento. É milenar o uso de comas no estudo de escalas e temperamentos. Apesar do menosprezo das pessoas do ramo das ciências exatas, as comas são baseadas nas razões das freqüências com valores exatos. O mérito das comas está na demonstração das estruturas de escalas e temperamentos: a coma pitagórica, da estrutura da escala pitagórica e suas derivadas; a coma sintônica, do médio tom e suas derivadas. No estudo de escalas e temperamentos há os termos 'diese menor' e 'diese maior'. O diese menor é a diferença entre uma oitava e três terças maiores puras. O diese maior é a diferença entre quatro terças menores puras e uma oitava. Todos os especialistas do ramo expressam dieses em centos. Para maior precisão, utilizam valores com grande número de casas. Mas esses autores desconhecem que o valor do diese menor é três comas sintônicas menos uma coma pitagórica e de diese maior, quatro comas sintônicas menos uma coma pitagórica. O fato demonstra um problema grave no método de estudo. Em 1980, o autor apresentou uma notação de intervalos musicais com cento e comas. A notação é composta de distância entre notas do igual temperamento (múltiplos de 100) mais discrepância expressada em comas. A vantagem desta notação é que, além da visualização da distância entre notas, ela é reversível à razão de freqüências. Isto significa que a expressão cento com comas resulta em valor exato. Esta notação é aplicável às escalas e temperamentos tradicionais. Para converter formas expressadas em cento com comas para cento convencional, são necessários apenas os valores em centos das duas comas. A forma convertida para centos é o valor aproximado, e não exato. Desde que seja apenas para visualização, não necessita de grande número de casas.

Tradicionalmente, no estudo de escalas e temperamentos utilizava-se o cálculo de razão de freqüências, a qual resulta em valor exato. Mais tarde adotou-se, concomitante à razão de freqüências, a notação do cento, criada por Ellis.

Uma unidade do cento é definida da seguinte maneira

$$\text{cento} = 2^{\frac{1}{1200}}$$

A razão de freqüências é convertida a cento como segue

$$2^{\frac{n}{1200}} = \frac{A}{B}$$
$$\log_{10} 2^{\frac{n}{1200}} = \log_{10} \frac{A}{B}$$
$$n = \frac{1200}{\log_{10} 2} \log_{10} \frac{A}{B}$$

A principal vantagem do cento é a visualização, já que a posição das notas na escala e as distâncias entre notas no temperamento igual ficam múltiplos de cem. Como cento é expoente, a distância entre notas é calculada simplesmente com adição ou subtração. Este método apresenta, no entanto, duas desvantagens: a) a necessidade de cálculo logarítmico com calculadora científica, ou

computador, para converter razão de frequências a cento; b) os valores expressos são aproximados, exceto no temperamento igual. Por este motivo o cento não é reversível à razão de frequências, valor exato.

Exemplo: o valor em cento de uma quinta pura  $V$  de 2:3 é

$$V = 701,95500086\dots$$

A terça maior pura  $III$  de 4:5 é

$$III = 386,31371386\dots$$

As Comas são de uso milenar no estudo de escalas e temperamentos. Apesar de geralmente menosprezadas pelo pessoal do campo das ciências exatas, elas se baseiam nas razões das frequências e seus valores são, portanto, exatos. Seu mérito consiste na demonstração das estruturas de escalas e temperamentos: a coma pitagórica na estrutura da escala pitagórica e suas derivadas; a coma sintônica na do médio tom e suas derivadas.

Coma pitagórica é a diferença entre doze quintas puras e sete oitavas.

Coma pitagórica  $P$  expressa-se por

$$P = (3^{12} \cdot 2^{-19})$$

Seu valor em cento é aproximadamente 23,46001038....

Coma sintônica é a diferença entre a terça maior pitagórica e a terça maior pura.

A expressão em razão da coma sintônica  $K$  é

$$K = (5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4})$$

Seu valor em cento é aproximadamente 21,50628959....

Apresentamos, em 1980, uma notação de intervalos musicais com cento e comas, a qual compõe-se de distâncias entre notas do temperamento igual (múltiplos de 100) mais discrepância expressada em comas. Tem como vantagem, além da visualização da distância entre notas, a reversibilidade à razão de frequências. Esta notação aplica-se a escalas e temperamentos, sendo sua razão de frequências expressada na fórmula

$$5^m \cdot 3^n \cdot 2^o$$

A coma pitagórica  $P$  em forma de cento, diferença entre doze quintas puras  $V$  e sete oitavas  $VIII$ , expressa-se por

$$12V - 7VIII = P$$

$$12V = 7 \times 1200 + P$$

A quinta pura  $V$  fica

$$12V = 7 \times 1200 + P$$

$$V = 700 + \frac{1}{12}P$$

A quinta pura  $V$  é reversível à razão da seguinte forma

$$\begin{aligned} V &= 2^{\frac{700}{1200}} (3^{12} \cdot 2^{-19})^{\frac{1}{12}} \\ &= 3 \cdot 2^{-1} \end{aligned}$$

Para formar a escala pitagórica cromática com círculo fechado, uma das quintas  $V_{PL}$  fica

$$\begin{aligned} V_{LP} &= 7VIII - 11V \\ &= 7 \times 1200 - 11 \left( 700 + \frac{1}{12}P \right) \\ &= 700 - \frac{11}{12}P \\ &= 700 + \frac{1}{12}P - P \end{aligned}$$

A quinta  $V_{PL}$  é uma coma pitagórica menor que a pura.

Na escala pitagórica, Si-Dó é semitom diatônico  $T_{SDP}$ , calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} T_{SDP} &= 3VIII - 5V \\ &= 3 \times 1200 - 5 \left( 700 + \frac{1}{12}P \right) \\ &= 100 - \frac{5}{12}P \end{aligned}$$

Dó-Dó# é o semitom cromático  $T_{SCP}$  e fica como segue

$$\begin{aligned} T_{SCP} &= 7V - 4VIII \\ &= 7 \left( 700 + \frac{1}{12}P \right) - 4 \times 1200 \\ &= 100 + \frac{7}{12}P \end{aligned}$$

A diferença de tamanho entre o semitom diatônico  $T_{SDP}$  e o semitom cromático  $T_{SCP}$  calcula-se assim

$$\begin{aligned} T_{SCP} - T_{SDP} &= (7V - 4VIII) - (3VIII - 5V) \\ &= 12V - 7VIII \\ &= P \end{aligned}$$

Também é coma pitagórica, diferença entre doze quintas pura e sete oitavas.

A terça maior pitagórica  $III_P$  é formada com quatro quintas puras  $V$  e expressa-se por

$$\begin{aligned} III_P &= 4V - 2VIII \\ &= 4 \left( 700 + \frac{1}{12}P \right) - 2 \times 1200 \\ &= 400 + \frac{4}{12}P \end{aligned}$$

A terça maior pura  $III$  é uma coma sintônica menor que a terça maior pitagórica e é representada por

$$III = 400 + \frac{4}{12}P - K$$

A terça maior pura *III* expressada em cento e coma é reversível à razão da seguinte forma

$$\begin{aligned} III &= 2^{\frac{400}{1200}} \left( 3^{12} \cdot 2^{-19} \right)^{\frac{4}{12}} \left( 5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4} \right)^{-1} \\ &= 5 \cdot 2^{-2} \end{aligned}$$

A terça maior pura *III* de duas oitavas acima é formada com quatro quintas  $V_0$  e expressa-se da seguinte maneira

$$4V_0 = III + 2VIII$$

O tamanho da quinta  $V_0$  é calculado com a fórmula

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{III + 2VIII}{4} \\ &= \frac{\left( 400 + \frac{4}{12}P - K \right) + 2 \times 1200}{4} \\ &= 700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K \end{aligned}$$

É reversível à razão da seguinte maneira

$$\begin{aligned} V_0 &= 2^{\frac{700}{1200}} \left( 3^{12} \cdot 2^{-19} \right)^{\frac{1}{12}} \left( 5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4} \right)^{-\frac{1}{4}} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Esta quinta  $V_0$  é do médio tom; os valores de todas as notas do médio tom são calculados somando-se as quintas.

Uma oitava *VIII* menos três terças puras *III* constitui a diése menor  $D_m$ , expressada da seguinte forma

$$\begin{aligned} D_m &= VIII - 3III \\ &= 1200 - 3 \left( 400 + \frac{4}{12}P - K \right) \\ &= 3K - P \end{aligned}$$

Esta é a definição da diése menor.

O valor do diése menor  $D_m$  expressado em razão calcula-se como segue

$$\begin{aligned} D_m &= \left( 5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4} \right)^3 \left( 3^{12} \cdot 2^{-19} \right)^{-1} \\ &= 5^{-3} \cdot 2^7 \end{aligned}$$

A terça pura *III* é expressada por

$$III = 4V_0 - 2VIII$$

A fórmula da diése  $D_m$  menor é modificada do seguinte modo

$$\begin{aligned} D_m &= VIII - 3III \\ &= VIII - 3(4V_0 - 2VIII) \\ &= 7VIII - 12V_0 \end{aligned}$$

A diése menor é a diferença entre sete oitavas e doze quintas do médio tom.

Uma quinta  $V_1$  do médio tom é chamada de quinta de lobo e calcula-se da seguinte maneira

$$\begin{aligned} V_L &= 7VIII - 11V_0 \\ &= 7 \times 1200 - 11 \left( 700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K \right) \\ &= 700 - \frac{11}{12}P + \frac{11}{4}K \\ &= \left( 700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K \right) + 3K - P \end{aligned}$$

A quinta de lobo  $V_1$  do médio tom é  $3K-P$  maior que a quinta normal  $V_0$ .

A diferença de tamanho entre o semitom diatônico do médio tom  $T_{SDM}$  e o semitom cromático  $T_{SCM}$  é calculada da seguinte forma

$$\begin{aligned} T_{SDM} - T_{SCM} &= (3VIII - 5V_0) - (7V_0 - 4VIII) \\ &= 7VIII - 12V_0 \\ &= 7 \times 1200 - 12 \left( 700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K \right) \\ &= 3K - P \end{aligned}$$

A diferença entre os semitons diatônico e cromático do médio tom também é diése menor. Ao contrário do que ocorre na escala pitagórica, o semitom diatônico é maior que o semitom cromático.

A diferença entre três terças menores puras e uma oitava é chamada de diése maior  $D_M$  e fica

$$\begin{aligned} D_M &= 4III_m - VIII \\ &= 4 \left( 300 - \frac{3}{12}P + K \right) - 1200 \\ &= 4K - P \end{aligned}$$

O valor da diése menor expressado em razão calcula-se assim

$$\begin{aligned} D_M &= (5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4})^4 (3^{12} \cdot 2^{-19})^{-1} \\ &= 5^{-4} \cdot 3^4 \cdot 2^3 \end{aligned}$$

A terça menor pura  $III_m$  de razão de 5:6 é igual a uma oitava menos uma sexta maior pura  $VI$  de 3:5, e demonstra-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} III_m &= VIII - VI \\ &= 1200 - \left(900 + \frac{3}{12}P - K\right) \\ &= 300 - \frac{3}{12}P + K \end{aligned}$$

Modificada, a fórmula da diése maior fica:

$$\begin{aligned} D_M &= 4III_m - VIII \\ &= 4(VIII - VI) - VIII \\ &= 3VIII - 4VI \\ &= 3 \times 1200 - 4\left(900 + \frac{3}{12}P - K\right) \\ &= 4K - P \end{aligned}$$

A diferença entre três oitavas e quatro sextas puras também é diése maior.

Todos os trabalhos sobre escalas e temperamentos tratam das diéses menor e maior com razão de freqüências e com centos convencionais, porém nenhum autor apresenta fórmulas tão simples como as acima mencionadas.

Helmholtz, fundador da acústica musical moderna, não empregou o termo coma na explicação de escalas e temperamentos, mesmo tendo aplicado a tabela de Oettingen (embora ela não apareça em seu livro). Por este motivo o livro é de difícil compreensão e o próprio Helmholtz tem dificuldade em explicar a quinta criada por ele.

Uma das fórmulas usadas em seu estudo de escalas é a seguinte

$$8V + III - 5VIII = S$$

Schisma  $S$  é a diferença entre as comas pitagórica e sintônica e expressa-se por

$$S = P - K$$

A fórmula em razão do schisma é

$$\begin{aligned} S &= \left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right) \left(5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4}\right)^{-1} \\ &= 5 \cdot 3^8 \cdot 2^{-15} \end{aligned}$$

Subtraindo-se um oitavo de schisma de oito quintas puras  $V$  fica o seguinte

$$8\left(V - \frac{1}{8}S\right) + III - 5VIII = 0$$

Uma quinta desta  $V_H$  é a quinta usada no instrumento construído por Helmholtz. Ela se expressa por

$$\begin{aligned}
 V_H &= V - \frac{1}{8}S \\
 &= \left(700 + \frac{1}{12}P\right) - \frac{1}{8}(P - K) \\
 &= 700 - \frac{1}{24}P + \frac{1}{8}K \\
 &= 700 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K\right)
 \end{aligned}$$

A razão desta quinta é calculada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 V_H &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{-\frac{1}{24}}\left(5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4}\right)^{\frac{1}{8}} \\
 &= 5^{-\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{7}{8}}
 \end{aligned}$$

O temperamento de Helmholtz é um raro exemplo de mudança simultânea de dois parâmetros: comas pitagóricas e sintônicas. No método convencional, esta mudança é praticamente impossível. Por exemplo: uma quinta  $V_{DC}$  formada com uma quinta de médio tom mais um doze avos de coma pitagórica fica o seguinte

$$\begin{aligned}
 V_{DC} &= \left(700 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K\right) + \frac{1}{12}P \\
 &= 700 + \frac{2}{12}P - \frac{1}{4}K
 \end{aligned}$$

A quinta  $V_{DC}$  expressada em razão fica

$$\begin{aligned}
 V_{DC} &= 2^{\frac{7}{12}}\left(3^{12} \cdot 2^{-19}\right)^{\frac{2}{12}}\left(5^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}} \\
 &= 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3 \cdot 2^{-\frac{19}{12}}
 \end{aligned}$$

A discrepância entre sete oitavas e doze quintas é

$$\begin{aligned}
 7VIII - 12V_{DC} &= 7 \times 1200 - 12\left(700 + \frac{2}{12}P - \frac{1}{4}K\right) \\
 &= 3K - 2P
 \end{aligned}$$

Somando-se os valores em cento e comas destas quintas, podem ser facilmente calculados os valores das notas de uma escala; em razão isto seria extremamente difícil.

Para análise de escalas e temperamentos usa-se o círculo de quinta. A unidade de divisão do círculo de quinta convencional é a quinta pura e as discrepâncias são notadas em relação a ela. A soma das discrepâncias é uma coma pitagórica negativa.

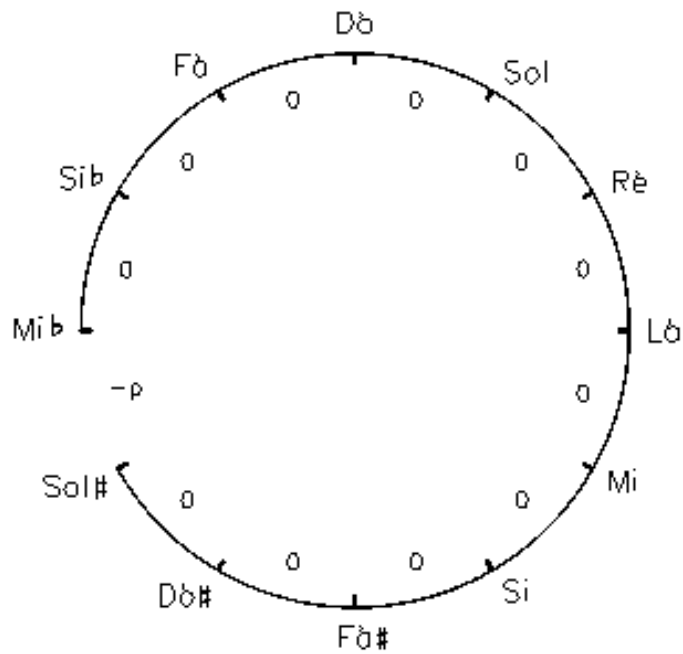


Figura 1: Círculo de quinta convencional da escala pitagórica

Em seu círculo de quinta o autor adotou a quinta do temperamento igual, equivalente a 700 centos, e a soma das discrepâncias é zero. A vantagem deste círculo sobre o convencional é a facilidade do cálculo da distância entre duas notas. O valor expressado em cento e comas é múltiplo de cem mais a soma das discrepâncias entre duas notas. A Fig. 1 é o círculo de quinta convencional da escala pitagórica e a Fig. 2 é círculo de quinta da escala pitagórica criado pelo autor.

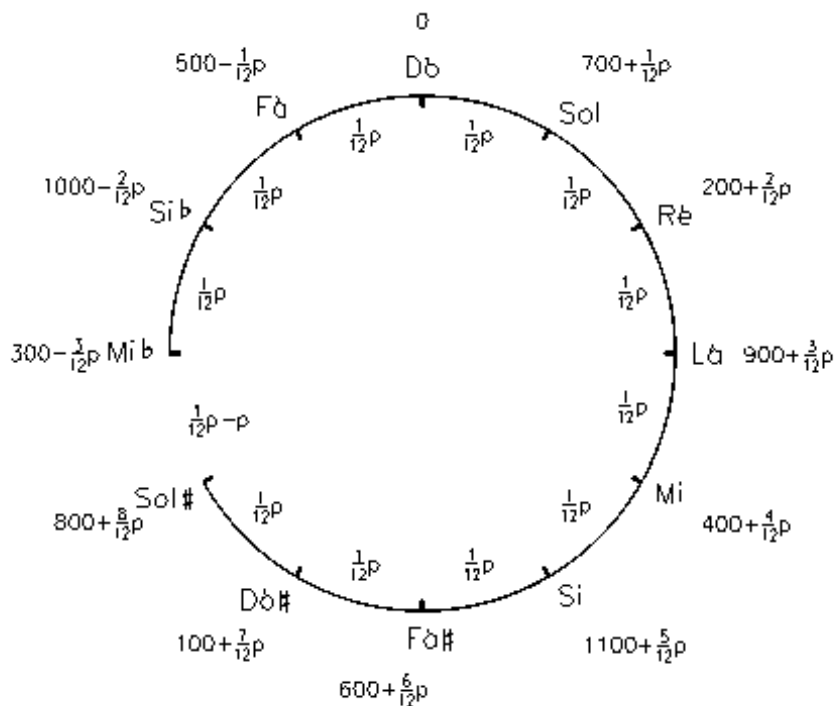


Figura 2: Círculo de quinta da escala pitagórica criado pelo autor

As fórmulas expressadas em cento com comas é conversível à expressão convencional de cento. Para tanto, são necessários apenas os valores em cento das duas comas.

Para transformar razão em cento é preciso ter os valores em cento dos números 3 e 5.

A quinta pura V de uma oitava acima na razão de 1:3 é



$$\begin{aligned} V + VIII &= 700 + \frac{1}{12}P + 1200 \\ &= 1900 + \frac{1}{12}P \end{aligned}$$

A terça maior pura III de duas oitavas acima na razão de 1:5 é

$$\begin{aligned} III + VIII &= \left(400 + \frac{4}{12}P - K\right) + 2 \times 1200 \\ &= 2800 + \frac{4}{12}P - K \end{aligned}$$

Para calcular cento  $I_{\text{cento}}$  da razão  $5^m \cdot 3^n \cdot 2^o$  emprega-se a expressão

$$I_{\text{cento}} = m \left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + n \left(1900 + \frac{1}{12}P\right) + o \times 1200$$

Por exemplo: a quinta de lobo do médio tom  $V_1$  é expressa por

$$V_1 = 5^{-\frac{11}{4}} \cdot 2^7$$

A quinta  $V_1$  é convertida a cento do seguinte modo

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{11}{4} \left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 7 \times 1200 \\ &= 700 - \frac{11}{12}P + \frac{11}{4}K \\ &= \left(400 + \frac{1}{12}P - \frac{1}{4}K\right) + 3K - P \end{aligned}$$

A razão da diése maior  $D_M$  é

$$D_M = 5^{-4} \cdot 3^4 \cdot 2^3$$

Diése maior  $D_M$  é convertida a cento da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D_M &= -4 \left(2800 + \frac{4}{12}P - K\right) + 4 \left(1900 + \frac{1}{12}P\right) + 3 \times 1200 \\ &= 4K - P \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Arakawa, H., Notação de Intervalos Musicais' 32ª. Reunião anual da SBPC, Rio de Janeiro, 1980.
- [2] Arakawa, H., Afinação e Temperamento: Teoria e Prática, Campinas, 1995.
- [3] Helmholtz, H., On the Sensations of Tone, Trans. A. Ellis, London, 1885.
- [4] Lloyd, L. S. and Boyle, H., Intervals, Scales and Temperaments, London, 1963.
- [5] Oettingen, A., Harmoniesystem in dualer Entwickelung, Dorpat, 1866.